Indicar **claramente** apellido y número de padrón en cada hoja que entregue. Todas las respuestas deber estar **debidamente justificadas**. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS BIEN RESUELTOS

Apellido: .... Nombres : ....

Padrón: .... Código materia: ....

1. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x,y) = -x^2 - y^2 + y + \frac{9}{4}$ en los puntos de la región $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$.

2. Sea $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, demostrar que $\vec{F} = \varphi \nabla \varphi$ es un campo de gradientes y calcular $\int_{\lambda_{AB}} \vec{F}.\vec{d}$ sabiendo que $\varphi(B) = 6$ y que $\int_{\lambda_{AB}} \nabla\varphi \, . \, \vec{dl} = 2$.
(A y B son los puntos inicial y final del arco de curva suave λ_{AB}).

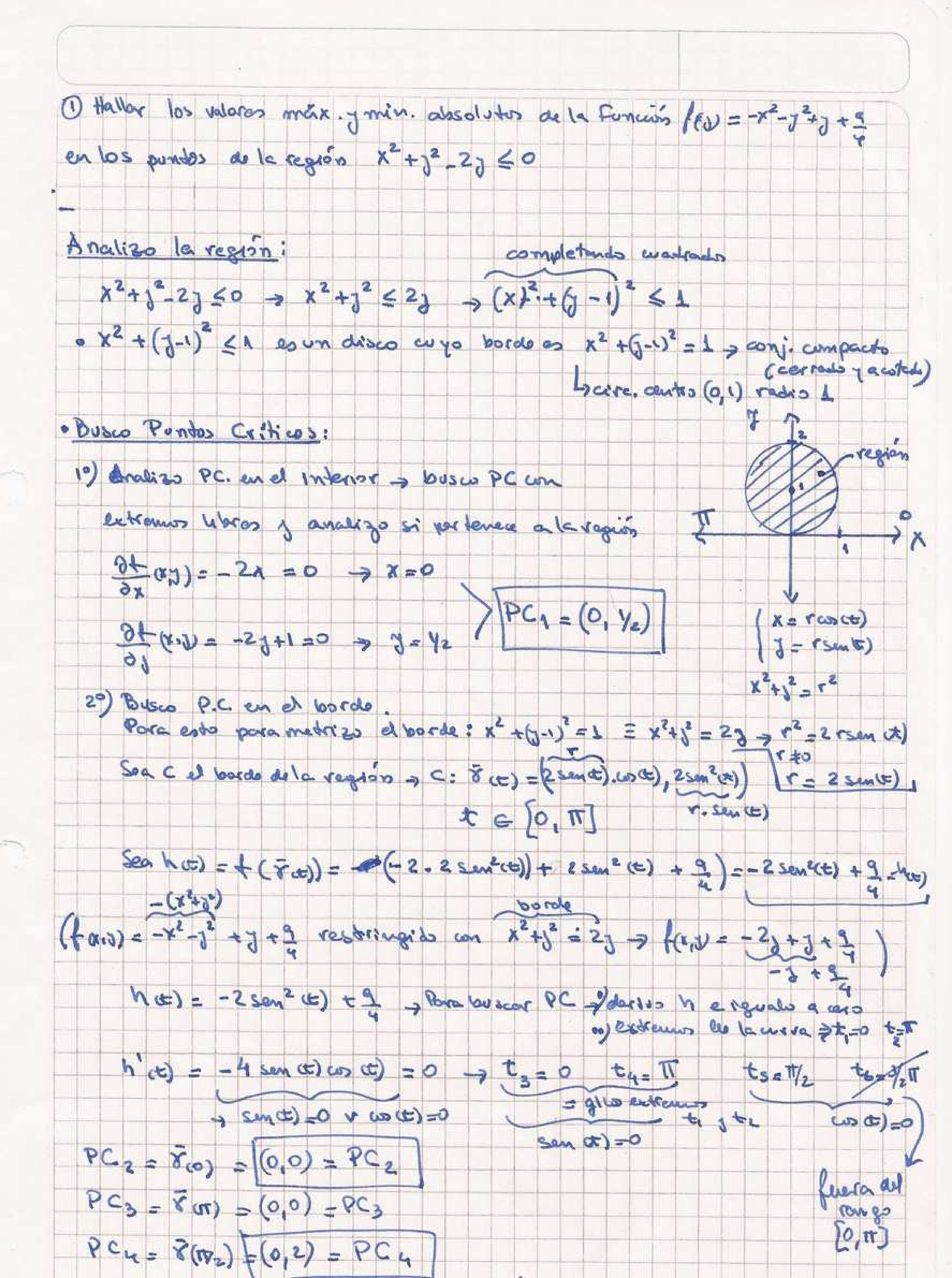
3. Hallar la circulación del campo $\vec{F}(x,y) = (3x + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y \, , 4\,y^2 - x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a lo largo de la frontera de la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \geq 0 \, ; \, x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \, ; \, 0 \leq y \leq x\}.$$

Indicar en un gráfico el sentido de la circulación utilizada.

4. Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y \leq 4 ; y \geq x ; 0 \leq z \leq x\}$. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (z, 3y, z)$, a través de la frontera de W, *salvo* la cara perteneciente la plano $z = x$ Indicar en un gráfico la normal utilizada.

5. Hallar la curva plana que pasa por el punto $(2,8)$, para la cual la pendiente de la recta tangente en un punto (x,y) es el triple de la pendiente de la recta que une dicho punto con el origen de coordenadas .



① Hallar los valores máx. y mín. absolutos de la función $f(x,y) = -x^2 - y^2 + y + \frac{9}{4}$ en los puntos de la región $x^2+y^2-2y \le 0$

—

Analizo la región:

$$x^2+y^2-2y \le 0 \to x^2+y^2 \le 2y \to \overbrace{(x)^2+(y-1)^2}^{\text{completando cuadrado}} \le 1$$

• $x^2+(y-1)^2 \le 1$ es un disco cuyo borde es $x^2+(y-1)^2 = 1$ → conj. compacto (cerrado y acotado)
↳ circ. centro $(0,1)$ radio 1

$x = r\cos(t)$
$y = r\,\text{sen}(t)$
$x^2+y^2 = r^2$

• **Busco Puntos Críticos:**

1°) Analizo PC. en el interior → busco PC con extremos libres y analizo si pertenece a la región

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x = 0 \to x = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y+1 = 0 \to y = 1/2$

→ $PC_1 = (0, 1/2)$

2°) Busco P.C. en el borde.
Para esto parametrizo el borde: $x^2+(y-1)^2 = 1 \equiv x^2+y^2 = 2y \to r^2 = 2r\,\text{sen}(t)$
$r \neq 0$
$r = 2\,\text{sen}(t)$

Sea C el borde de la región → C: $\bar{\gamma}(t) = (\overbrace{2\,\text{sen}(t)}^{r}.\cos(t), \underbrace{2\,\text{sen}^2(t)}_{r.\,\text{sen}(t)})$

$$t \in [0, \pi]$$

Sea $h(t) = f(\bar{\gamma}(t)) = (-2 \cdot 2\,\text{sen}^2(t)) + 2\,\text{sen}^2(t) + \frac{9}{4}) = -2\,\text{sen}^2(t) + \frac{9}{4} = h(t)$

($f(x,y) = \overbrace{-x^2-y^2}^{-(x^2+y^2)} + y + \frac{9}{4}$ restringido con $\overbrace{x^2+y^2 = 2y}^{\text{borde}} \to f(x,y) = \underbrace{-2y + y}_{-y} + \frac{9}{4}$)

$h(t) = -2\,\text{sen}^2(t) + \frac{9}{4}$ → Para buscar PC ⇒ i) derivo h e igualo a cero
ii) extremos de la curva ⇒ $t_1 = 0$ $t_2 = \pi$

$h'(t) = \underbrace{-4\,\text{sen}(t)\cos(t)}_{\to\ \text{sen}(t) = 0\ \vee\ \cos(t) = 0} = 0 \to \underbrace{t_3 = 0 \quad t_4 = \pi}_{\text{sen}(t) = 0}$ = q' los extremos t_1 y t_2 $\quad \underbrace{t_5 = \pi/2 \quad \cancel{t_6 = \tfrac{3}{2}\pi}}_{\cos(t) = 0}$ → fuera del rango $[0, \pi]$

$PC_2 = \bar{\gamma}(0) = (0,0) = PC_2$

$PC_3 = \bar{\gamma}(\pi) = (0,0) = PC_3$

$PC_4 = \bar{\gamma}(\pi/2) = (0,2) = PC_4$

cont. 1/

Como la región es un conjunto compacto (cerrado y acotado), por el Teorema de Weierstrass puedo asegurar que existe, al menos, un máximo y un mínimo absolutos.

Evalúo la función en estos PC y analizo → mayor valor → máx. abs
menor valor → mín. abs.

$$f(PC_1) = f_{(0,1/2)} = \frac{5}{2}$$

$$f(PC_2) = f(0,0) = \frac{9}{4}$$

$$f(PC_4) = f(0,2) = \frac{1}{4}$$

→ f alcanza máximo abs. en $(0,1/2)$

f alcanza mínimo absoluto en $(0,2)$

② Sea $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ demostrar que $\bar{F} = \varphi \nabla \varphi$ es un campo de gradientes y calcular $\int_{\lambda AB} \bar{F} . d\bar{l}$ sabiendo que $\varphi(B) = 6$ y $\int_{\lambda AB} \nabla \varphi . d\bar{l} = 2$

(A y B son los puntos inicial y final del arco de curva suave λ_{AB})

Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$

Sea $u = \frac{\varphi^2}{2} \rightarrow \nabla u = \frac{2 \varphi . \nabla \varphi}{2} \rightarrow \nabla u = \varphi \nabla \varphi$

1) $\bar{F} = \varphi \nabla \varphi = \nabla u \rightarrow \bar{F} = \bar{\nabla} u \rightarrow u$ es función potencial de $\bar{F}$

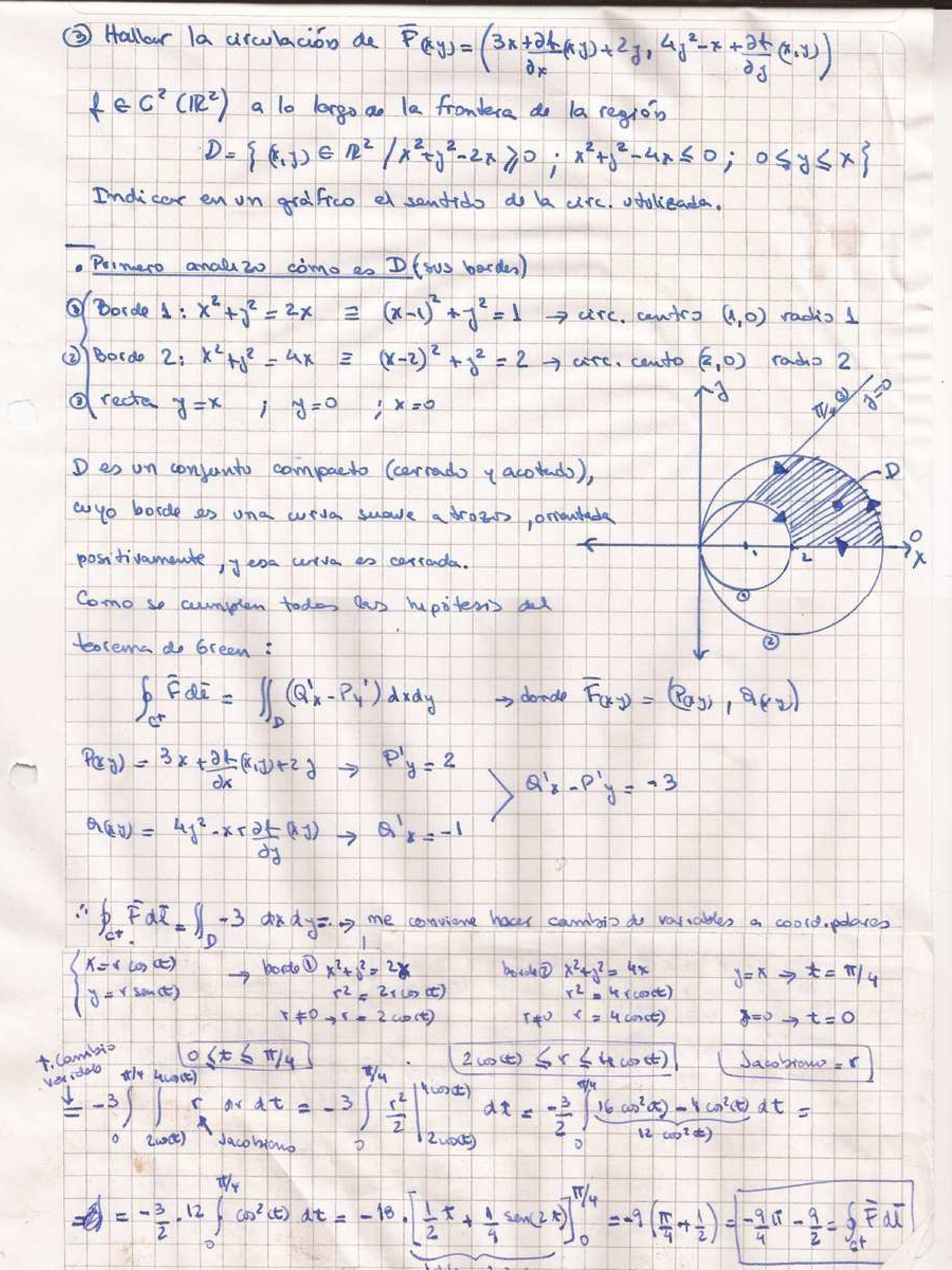
2) $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \nabla \varphi \in C^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \bar{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo

$\rightarrow$ 1) y 2) $\rightarrow \bar{F}$ es campo conservativo $\rightarrow \bar{F}$ es campo de gradientes

—

$$\int_{\lambda AB} \bar{F} d\bar{l} \overset{\text{por ser campo conservativo}}{=} u_{(B)} - u_{(A)} = \frac{\varphi_{(B)}^2}{2} - \frac{\varphi_{(A)}^2}{2} \overset{\text{dato: } \varphi(B)=6}{=} \frac{6^2}{2} - \underset{\uparrow \text{ x C.A.}}{\frac{4^2}{2}} = \boxed{10 = \int_{\lambda AB} \bar{F} d\bar{l}}$$

$$\text{C.A.: } \int_{\lambda AB} \nabla \varphi d\bar{l} \overset{\varphi \text{ es conservativo}}{=} \underbrace{\varphi_{(B)}}_{\substack{6 \\ \text{dato}}} - \underbrace{\varphi_{(A)}}_{\text{dato = 2}} \overset{\text{dato}}{=} 2 = 6 - \varphi_{(A)} \rightarrow \varphi_{(A)} = 4$$



③ Hallar la circulación de $\bar{F}(x,y) = \left(3x + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y,\ 4y^2 - x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a lo largo de la frontera de la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2-2x \geq 0;\ x^2+y^2-4x \leq 0;\ 0 \leq y \leq x\}$$

Indicar en un gráfico el sentido de la circ. utilizada.

• Primero analizo cómo es D (sus bordes)

① Borde 1: $x^2+y^2 = 2x \equiv (x-1)^2+y^2 = 1$ → circ. centro (1,0) radio 1

② Borde 2: $x^2+y^2 = 4x \equiv (x-2)^2+y^2 = 2$ → circ. centro (2,0) radio 2

③ recta $y = x$; $y = 0$; $x = 0$

D es un conjunto compacto (cerrado y acotado), cuyo borde es una curva suave a trozos, orientada positivamente, y esa curva es cerrada.

Como se cumplen todas las hipótesis del teorema de Green:

$$\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_D (Q'_x - P'_y)\, dx\, dy \quad \rightarrow \text{donde } \bar{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

$P(x,y) = 3x + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2y \rightarrow P'_y = 2$

$Q(x,y) = 4y^2 - x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \rightarrow Q'_x = -1$

$\Big\} \ Q'_x - P'_y = -3$

∴ $\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_D -3\, dx\, dy$ → me conviene hacer cambio de variables a coord. polares

$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \end{cases}$ → borde ① $x^2+y^2 = 2x$; $r^2 = 2r\cos(t)$; $r \neq 0 \rightarrow r = 2\cos(t)$

borde ② $x^2+y^2 = 4x$; $r^2 = 4r\cos(t)$; $r \neq 0$ $r = 4\cos(t)$

$y = x \rightarrow t = \pi/4$

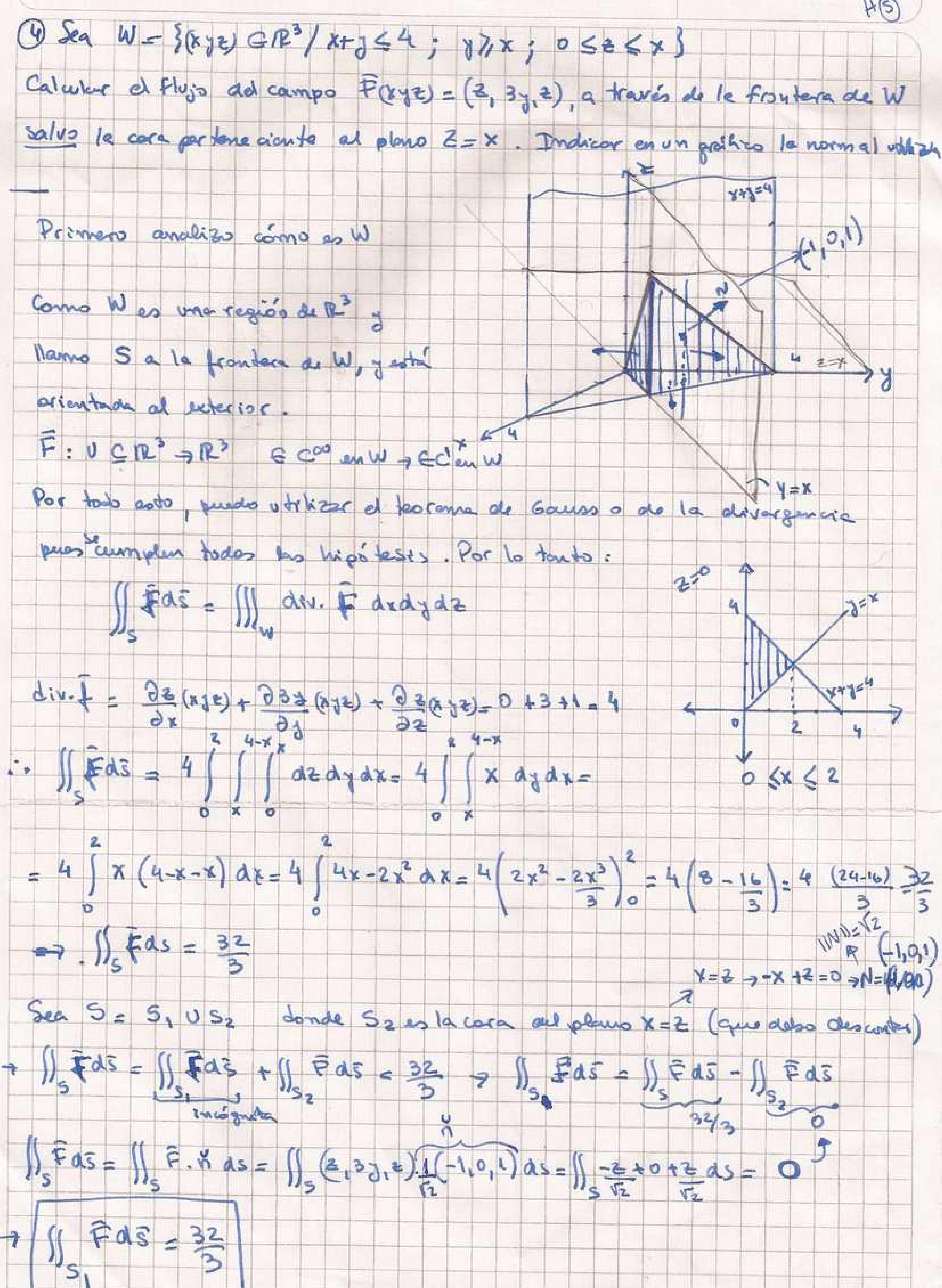
$y = 0 \rightarrow t = 0$

$\boxed{0 \leq t \leq \pi/4}$. $\boxed{2\cos(t) \leq r \leq 4\cos(t)}$ $\boxed{\text{Jacobiano} = r}$

t. cambio variable

$$\stackrel{\downarrow}{=} -3\int_0^{\pi/4}\int_{2\cos(t)}^{4\cos(t)} \underset{\text{Jacobiano}}{r}\, dr\, dt = -3\int_0^{\pi/4} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{2\cos(t)}^{4\cos(t)} dt = -\frac{3}{2}\int_0^{\pi/4} \underbrace{16\cos^2(t) - 4\cos^2(t)}_{12\cos^2(t)}\, dt =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot 12 \int_0^{\pi/4} \cos^2(t)\, dt = -18 \cdot \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\text{sen}(2t)\right]_0^{\pi/4} = -9\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \boxed{-\frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2} = \oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l}}$$



H5

(4) Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y \le 4 ;\ y \geq x ;\ 0 \le z \le x\}$

Calcular el flujo del campo $\bar{F}(x,y,z) = (z, 3y, z)$, a través de la frontera de W <u>salvo</u> la cara perteneciente al plano $z = x$. Indicar en un gráfico la normal utilizada.

Primero analizo cómo es W

Como W es una región de $\mathbb{R}^3$ y llamo S a la frontera de W, y está orientada al exterior.

$\bar{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \in C^\infty$ en W $\to \in C^1$ en W

Por todo esto, puedo utilizar el teorema de Gauss o de la divergencia pues se cumplen todas las hipótesis. Por lo tanto:

$$\iint_S \bar{F}\, d\bar{S} = \iiint_W \text{div.}\, \bar{F}\, dx\,dy\,dz$$

$$\text{div.}\bar{F} = \frac{\partial z}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial 3y}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial z}{\partial z}(x,y,z) = 0 + 3 + 1 = 4$$

$$\therefore \iint_S \bar{F}\, d\bar{S} = 4\int_0^2 \int_x^{4-x} \int_0^x dz\,dy\,dx = 4\int_0^2 \int_x^{4-x} x\, dy\,dx =$$

$$= 4\int_0^2 x(4-x-x)\,dx = 4\int_0^2 4x - 2x^2\, dx = 4\left(2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 4\left(8 - \frac{16}{3}\right) = 4\,\frac{(24-16)}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow \iint_S \bar{F}\, dS = \frac{32}{3}$$

$\|N\| = \sqrt{2}$ $(-1,0,1)$

$x = z \to -x + z = 0 \to N = (-1,0,1)$

Sea $S = S_1 \cup S_2$ donde S_2 es la cara del plano $x = z$ (que debo descontar)

$$\to \iint_S \bar{F}\, d\bar{S} = \underbrace{\iint_{S_1} \bar{F}\, d\bar{S}}_{\text{incógnita}} + \iint_{S_2} \bar{F}\, d\bar{S} = \frac{32}{3} \to \iint_{S_1} \bar{F}\, d\bar{S} = \underbrace{\iint_S \bar{F}\, d\bar{S}}_{32/3} - \underbrace{\iint_{S_2} \bar{F}\, d\bar{S}}_{0}$$

$$\iint_S \bar{F}\, d\bar{S} = \iint_S \bar{F}\cdot\breve{n}\, dS = \iint_S (z, 3y, z)\cdot\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)}^{\breve{n}}\, dS = \iint_S \frac{-z}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{z}{\sqrt{2}}\, dS = 0$$

$$\to \boxed{\iint_{S_1} \bar{F}\, d\bar{S} = \frac{32}{3}}$$

⑤ Hallar la curva plana que pasa por (2, 8), para la cual la pendiente de la recta tg. en un punto (x, y) es el triple de la pendiente de la recta que une dicho punto con el origen de coord.

Pendiente $= m = y' = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) \cdot 3$ ← triple   donde $(x_1, y_1) = (x, y)$

$y \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$ → orig coord.

Entonces

$$y' = 3\frac{y}{x} \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{3\,dx}{x}$$ integrando m.a.m → $\ln|y| = \underbrace{3\ln(x)}_{\ln(x^3)} + c$

$$y = x^3 \cdot K$$

la curva pasa x (2, 8) → $8 = 2^3 \cdot K$ → $K = 1$

∴ la curva solicitada es $\boxed{y = x^3}$